Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Trei piraţi, Jack, Tom şi Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulţi săculeţi care conţin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeţ şi împarte conţinutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculeţul se goleşte. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeţ, începând tot cu sine şi respectând aceeaşi ordine. Procedează la fel cu ceilalţi săculeţi, împărţind monedele după aceeaşi regulă. La sfârşit, Bill constată că are cu trei monede mai puţin decât Jack. Aflaţi câte monede a primit fiecare pirat.

Soluţie

Dacă Bill are n monede şi Jack are $n+3$ monede, atunci Tom poate avea $n, n+1, n+2$ sau $n+3$ monede. .... **2 puncte**

Numărul total al monedelor poate fi $3n+3, 3n+4, 3n+5$ sau $3n+6$. Cum $2012 = M_3 + 2$, singura variantă care convine este $3n+5$ .. **3 puncte**

Obţinem că $n = 669$, prin urmare Jack, Tom şi Bill au 672, 671 respectiv 669 monede .... **2 puncte**

Problema 2. Fiecare element al mulţimii $\{2, 3, 4, ..., 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeaşi culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Soluţie

Cum 2 divide orice număr par, rezultă că toate numerele pare au o aceeaşi culoare, să spunem roşu .... **2 puncte**

Toate numerele impare al căror dublu este în mulţime (anume 3, 5, ..., 25) trebuie să fie tot roşii .... **1 punct**

Numerele 27, 33, 35, 39, 45, 49 au fiecare câte un divizor roşu, prin urmare vor fi şi ele roşii .... **2 puncte**

Numerele prime mai mari decât 25 (anume 29, 31, 37, 41, 43, 47) pot avea câte o altă culoare. .... **1 punct**

Numărul maxim de culori care pot fi utilizate este $1 + 6 = 7$. **1 punct**

Problema 3. Doi prieteni, Cristi şi Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 999\}$, pe care îl înmulţeşte cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulţeşte noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat şi aşa mai departe. Pierde cel care obţine primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinaţi câte posibilităţi de a alege numărul iniţial are Cristi astfel încât să câştige el jocul.

Soluţia 1. Cristi câştigă dacă ajunge la un număr mai mare sau egal cu 978 şi mai mic decât 1000. Evident, acesta va fi un număr par ... **1 punct**

Deoarece Cristi înmulţeşte cu 2 şi Marius adună 22 la fiecare pas, numerele obţinute în timpul jocului sunt pare. Numerele 978, 982, 986, 990, 994 şi 998 se obţin prin dublarea numerelor impare 489, 491, 493, 495, 497, 499, numere care nu pot fi obţinute în timpul jocului. Aceste numere pot fi însă alese iniţial de Cristi şi îi asigură câştigarea jocului. .... **1 punct**

În continuare, C înseamnă rezultat obţinut de Cristi, A înseamnă număr care, dacă este ales de Cristi, îi asigură acestuia câştigarea jocului, iar M înseamnă rezultat obţinut de Marius. Numerele 980,984,988,992 şi 996 se pot obţine prin următoarele succesiuni de paşi:

$980(C) \leftarrow 490(A, M) \leftarrow 468(C) \leftarrow 234(A, M) \leftarrow 212(C) \leftarrow 106(A, M) \leftarrow 84(C) \leftarrow 42(A, M) \leftarrow 20(C) \leftarrow 10(A)$

$984(C) \leftarrow 492(A, M) \leftarrow 470(C) \leftarrow 235(A)$

$988(C) \leftarrow 494(A, M) \leftarrow 472(C) \leftarrow 236(A, M) \leftarrow 214(C) \leftarrow 107(A)$

$992(C) \leftarrow 496(A, M) \leftarrow 474(C) \leftarrow 237(A)$

$996(C) \leftarrow 498(A, M) \leftarrow 476(C) \leftarrow 238(A, M) \leftarrow 216(C) \leftarrow 108(A, M) \leftarrow 86(C) \leftarrow 43(A)$

.... **4 puncte**

Deci, Cristi are 22 de posibilităţi de a alege numărul iniţial astfel încât să câştige jocul. .... **1 punct**

Soluţia 2. Dacă Cristi alege numărul a, până la finalul jocului vor fi maxim cinci etape:

$$\underbrace{a \to 2a \to 2a+22}_{I} \to \underbrace{4a+44 \to 4a+66}_{II} \underbrace{\to 8a+132 \to 8a+154}_{III} \to$$
$$\underbrace{\to 16a+308 \to 16a+330}_{IV} \underbrace{\to 32a+660 \to 32a+682}_{V} \to 64a+1364 > 1000.$$

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa I dacă $2a < 1000$ şi $2a + 22 \geq 1000$, adică $a < 500$ şi $a \geq 489$. Rezultă că $a \in \{489, \cdots, 499\}$, deci 11 posibilităţi. ... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa II dacă $4a + 44 < 1000$ şi $4a + 66 \geq 1000$, adică $a < 239$ şi $a \geq \frac{467}{2}$. Rezultă că $a \in \{234, \cdots, 238\}$, deci 5 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa III dacă $8a + 132 < 1000$ şi $8a + 154 \geq 1000$, adică $a < \frac{217}{2}$ şi $a \geq \frac{423}{4}$. Rezultă că $a \in \{106, 107, 108\}$, deci 3 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa IV dacă $16a + 308 < 1000$ şi $16a + 330 \geq 1000$, adică $a < \frac{173}{4}$ şi $a \geq \frac{335}{8}$. Rezultă că $a \in \{42, 43\}$, deci 2 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa V dacă $32a + 660 < 1000$ şi $32a + 682 \geq 1000$, adică $a < \frac{85}{8}$ şi $a \geq \frac{159}{16}$. Rezultă că $a = 10$, deci o singură posibilitate.

. . . . **1 punct**

În concluzie, Cristi are $11 + 5 + 3 + 2 + 1 = 22$ posibilităţi de a alege numărul iniţial astfel încât să câştige jocul.

. . . . **1 punct**

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeaşi sumă a cifrelor.

Demonstraţi că mulţimea $M = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ conţine o infinitate de numere *olimpice* şi o infinitate de numere care nu sunt *olimpice.*

Soluţie

Notăm cu $s(a)$ suma cifrelor din scrierea zecimală a numărului natural a.

Dacă n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{2k \text{ cifre}} = \underbrace{5454\ldots54}_{2k \text{ cifre}} + \underbrace{4545\ldots45}_{2k \text{ cifre}}.$$

Cum $s(\underbrace{5454\ldots54}_{2k \text{ cifre}}) = s(\underbrace{4545\ldots45}_{2k \text{ cifre}}) = 9k$, rezultă că $10^n - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, n par, este număr olimpic. . . . . **3 puncte**

Dacă $a + b = 99\ldots9$, atunci în adunarea $a + b$ nu există treceri peste ordin, deci $s(a + b) = s(a) + s(b)$. . . . . **2 puncte**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ impar. Dacă, prin absurd, $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}} = a + b$, cu $s(a) = s(b)$, ar rezulta că $9n = s(\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}) = s(a + b) = s(a) + s(b) = 2s(a)$, adică un număr impar este egal cu unul par, contradicţie. Ca urmare, numerele de forma $10^n - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, n impar, nu sunt olimpice. . . . . **2 puncte**

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.